TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP
KHOA SP TOÁN-TIN

VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO LỚP ÁNH XẠ SUZUKI SUY RỘNG TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP

Ngành đào tạo: Sư phạm Toán học

Trình độ đào tạo: Đại học

Đồng Tháp, năm 2014

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

KHOA SP TOÁN-TIN

VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO LỚP ÁNH XẠ SUZUKI SUY RỘNG TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP

Ngành đào tạo: Sư phạm Toán học

Trình độ đào tạo: Đại học

Sinh viên thực hiện: Hoàng Hiền Hưởng

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Nguyễn Trung Hiếu

Đồng Tháp, năm 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả trình bày trong khóa luận là hoàn toàn trung thực và khóa luận hoàn toàn không trùng lặp với bất kì tài liệu nào khác.

Đồng Tháp, ngày 24 tháng 4 năm 2014

Tác giả

Hoàng Hiền Hưởng

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1 Lí do chọn đề tài

Nhiều bài toán trong toán học và trong các lĩnh vực khoa học khác thường dẫn đến việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình $F(x) = x$. Nghiệm x của phương trình này được gọi là điểm bất động của ánh xạ F. Do đó, việc xây dựng những công cụ khảo sát sự tồn tại điểm bất động của một ánh xạ thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả. Trong những công cụ đó, Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ được xem là cơ bản nhất. Từ nguyên lý này, nhiều tác giả đã mở rộng cho những lớp không gian khác nhau cũng như những lớp ánh xạ co suy rộng khác nhau.

Trong hướng nghiên cứu đó, nhiều tác giả đã xây dựng những không gian mêtric suy rộng như 2-mêtric [8], D-mêtric [4], G-mêtric [17], S-mêtric [21]. Cùng hướng nghiên cứu này, trong bài báo [15], Khamsi và Husain đã giới thiệu khái niệm kiểu-mêtric. Đồng thời, trong bài báo này, các tác giả đã khảo sát một số tính chất của không gian kiểu-mêtric và thiết lập định lí điểm bất động của lớp ánh xạ KKM trên không gian này. Kể từ đó, việc nghiên cứu thiết lập định lí điểm bất động trên không gian kiểu-mêtric được một số tác giả quan tâm nghiên cứu [7, 11, 12].

Bên cạnh việc đề xuất những không gian mêtric suy rộng, nhiều tác giả đã xây dựng những dạng ánh xạ co suy rộng trên không gian mêtric [3, 18]. Năm 2008, trong bài báo [19], Suzuki đã giới thiệu khái niệm lớp ánh xạ Suzuki trên không gian mêtric và thiết lập một mở rộng của Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ. Sau đó, một số tác giả đã giới thiệu những dạng mở rộng của lớp ánh xạ Suzuki và thiết lập định lí điểm bất động cho những lớp ánh xạ này trên không gian mêtric cũng như không gian kiểu-mêtric [1, 6, 7, 11, 20, 22]. Gần đây, trong bài báo [16], Muralisankar và Jeyabal đã giới thiệu một dạng mở rộng của ánh xạ Suzuki và một số định lí điểm bất động của lớp ánh xạ này. Năm 2014, trong bài báo [13], Kumam, Dung và Sitthithakerngkiet đã giới thiệu một dạng tổng quát của ánh xạ co kiểu Ćirić và đã thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ này.

Trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu tham khảo liên quan đến ánh xạ Suzuki suy rộng, chúng tôi nhận thấy rằng dạng ánh xạ co suy rộng trong bài báo [16] chưa được khảo sát trên không gian kiểu-mêtric. Do đó, chúng tôi chọn đề tài *"Về định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric"* làm đề tài khóa luận tốt nghiệp.

2 Tổng quan về đề tài

Năm 2008, trong bài báo [19], Suzuki đã giới thiệu khái niệm lớp ánh xạ Suzuki trên không gian mêtric và thiết lập một mở rộng của Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ như sau.

Cho (X, d) *là một không gian mêtric đầy đủ, ánh xạ* $T : X \longrightarrow X$ *và ánh xạ không tăng* $\theta : [0, 1) \longrightarrow (\frac{1}{2}, 1]$ *xác định bởi*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \textit{nếu} \ \ 0 \le r \le (\sqrt{5}-1)/2 \\ (1-r)r^{-2} & \textit{nếu} \ \ (\sqrt{5}-1)/2 \le r \le 2^{-1/2} \\ (1+r)^{-}1 & \textit{nếu} \ \ 2^{-1/2} \le r < 1. \end{cases}$$

Giả sử tồn tại $r \in [0, 1)$ *sao cho*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \text{ suy ra } d(Tx,Ty) \leq rd(x,y) \text{ với mọi } x,y \in X.$$

Khi đó, T có duy nhất điểm bất động z. Hơn nữa, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = z$ với mọi $x \in X$.

Sau đó, một số tác giả đã suy rộng khái niệm ánh xạ Suzuki và thiết lập định lí điểm bất động cho những lớp ánh xạ Suzuki suy rộng này trên không gian mêtric cũng như không gian kiểu-mêtric [6, 11, 20, 22]. Gần đây, trong [16], Muralisankar và Jeyabal đã giới thiệu một lớp ánh xạ Suzuki suy rộng và định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ này trong không gian mêtric đầy đủ như sau.

Cho (X,d) là một không gian mêtric đầy đủ và ánh xạ $f : X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0,1)$ sao cho

$$\frac{1}{2}d(x,fx) < d(x,y) \text{ suy ra } d(fx,fy) \leq rd(x,y) \text{ với mọi } x,y \in X.$$

Khi đó, f có duy nhất một điểm bất động.

Năm 2014, Kumama, Dung và Sitthithakerngkiet đã giới thiệu một dạng mở rộng của ánh xạ co kiểu Ćirić trên không gian mêtric bằng cách bổ sung thêm bốn số hạng mới $d(T^2x,x), d(T^2x,Tx), d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)$ trong điều kiện co và đã thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ này.

Từ những vấn đề trên, chúng tôi đặt vấn đề mở rộng các định lí điểm bất động của lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian mêtric đầy đủ trong bài báo [16] sang không gian kiểu-mêtric đầy đủ bằng cách bổ sung thêm các số hạng mới trong điều kiện co.

3 Mục tiêu nghiên cứu

- Thiết lập và chứng minh một số định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric.

- Xây dựng một số áp dụng của kết quả đạt được.

4 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Một số dạng mở rộng của ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric trong lĩnh vực lí thuyết điểm bất động.

5 Nội dung nghiên cứu

- Nghiên cứu khái niệm kiểu-mêtric, một số tính chất cơ bản của không gian kiểu-mêtric.

- Nghiên cứu khái niệm ánh xạ Suzuki, một số mở rộng của nó và những định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ này trên không gian mêtric.

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric.

- Xây dựng áp dụng của kết quả đạt được.

Nội dung chính của khóa luận được trình bày trong hai chương

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric và áp dụng.

6 Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu tài liệu: Từ tài liệu tham khảo liên quan đến nội dung nghiên cứu của khóa luận, chúng tôi phân tích, tổng hợp và tương tự hóa để thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric.

- Trao đổi với nhóm nghiên cứu, các tác giả cùng lĩnh vực và giảng viên hướng dẫn.

7 Kế hoạch nghiên cứu

STT	**Thời gian**	**Nội dung công việc**	**Người thực hiện**
1	1/11/2013 đến 30/11/2013	Xây dựng đề cương khóa luận	- SV thực hiện khóa luận và GVHD.
2	1/12/2013 đến 30/12/2013	- Nghiên cứu về không gian kiểu-mêtric và một số kết quả liên quan qua các tài liệu tham khảo. - Báo cáo kết quả nghiên cứu trước GVHD vào giữa tháng và cuối tháng.	- SV thực hiện khóa luận. - SV thực hiện khóa luận và GVHD.

STT	Thời gian	Nội dung công việc	Người thực hiện
3	1/1/2014 đến 30/1/2014	- Nghiên cứu về định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki và một số mở rộng trên không gian mêtric. - Báo cáo kết quả nghiên cứu trước GVHD vào giữa tháng và cuối tháng.	- SV thực hiện khóa luận. - SV thực hiện khóa luận và GVHD.
4	1/2/2014 đến 30/2/2014	- Nghiên cứu về định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric. - Báo cáo kết quả nghiên cứu trước GVHD vào giữa tháng và cuối tháng.	- SV thực hiện khóa luận. - SV thực hiện khóa luận và GVHD.
5	1/3/2014 đến 15/3/2014	Báo cáo tóm tắt kết quả nghiên cứu của khóa luận trước bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng.	- SV thực hiện khóa luận và GVHD. - Các thành viên bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng.
6	16/3/2014 đến 27/4/2014	- Hoàn chỉnh khóa luận tốt nghiệp. - Nộp khóa luận về khoa.	- SV thực hiện khóa luận và GVHD. - SV thực hiện khóa luận.
7	2/5/2014 đến 12/5/2014	Báo cáo khóa luận.	- SV thực hiện khóa luận.

CHƯƠNG 1

KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

1.1 Khái niệm kiểu-mêtric

Mục này trình bày khái niệm và ví dụ về không gian kiểu-mêtric.

1.1.1 Định nghĩa ([15], Definition 6)**.** Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ là một số thực và $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z \in X$,

(1) $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $D(x, y) = D(y, x)$;

(3) $D(x, z) \leq K\big[D(x, y) + D(y, z)\big]$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric*.

1.1.2 Nhận xét. (1) (X, d) là một không gian mêtric khi và chỉ khi $(X, d, 1)$ là một không gian kiểu-mêtric.

(2) Trong bài báo [14], Khamsi đã giới thiệu một kiểu-mêtric khác, trong đó điều kiện (3) của Định nghĩa 1.1.1 được thay bởi điều kiện sau.

$$(3') \quad D(x, z) \leq K\big[D(x, y_1) + D(y_1, y_2) + \ldots + D(y_n, z)\big]$$

với mọi $x, y_1, \ldots, y_n, z \in X$.

Việc nghiên cứu thiết lập định lí điểm bất động trên không gian kiểu-mêtric theo định nghĩa của Khamsi cũng được một số tác giả quan tâm [9, 10]. Trong đề tài này, chúng tôi xét kiểu-mêtric theo Định nghĩa 1.1.1. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một số ví dụ về kiểu-mêtric.

1.1.3 Ví dụ ([5], Example 2.4)**.** Xét $X = \mathbb{R}$ và ánh xạ $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ xác định bởi $D(x, y) = (x-y)^2$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó, D là một kiểu-mêtric trên X với $K = 2$.

Chứng minh. Với mỗi $x, y \in X$, ta có $D(x, y) \geq 0, D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$ và $D(x, y) = D(y, x)$. Hơn nữa, với mỗi $x, y, z \in X$ ta có

$$D(x, z) = (x-z)^2 = (x-y+y-z)^2 \leq 2[(x-y)^2+(y-z)^2] = 2[D(x, y)+D(y, z)].$$

Do đó, D là một kiểu-mêtric trên X với $K = 2$. □

1.1.4 Ví dụ ([15], Example 1)**.** Cho X là tập các hàm f liên tục trên $[0, 1]$ và ánh xạ $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ xác định bởi

$$D(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Khi đó, D là kiểu-mêtric trên X với $K = 2$.

Chứng minh. Với mỗi $f, g \in X$ ta có $D(f, g) \geq 0, D(f, g) = 0$ khi và chỉ khi $f = g$ và $D(f, g) = D(g, f)$. Hơn nữa, với mỗi $f, g, h \in X$ ta có

$$\begin{aligned} D(f, h) &= \int_0^1 |f(x) - h(x)|^2 dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|^2 dx \\ &\leq 2[\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|^2 dx] \\ &= 2[D(f, g) + D(g, h)]. \end{aligned}$$

Do đó, D là kiểu-mêtric trên X với $K = 2$. □

1.1.5 Ví dụ ([5], Example 2.2)**.** Cho $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ và ánh xạ $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ xác định bởi

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \\ 1 & \text{nếu } x \neq y \in \{0,1\} \\ |x-y| & \text{nếu } x \neq y \in \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\} \\ \frac{1}{4} & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó, D là kiểu-mêtric trên X với $K = 4$.

Chứng minh. Với mỗi $x, y \in X$, ta có $D(x,y) \geq 0, D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$ và $D(x,y) = D(y,x)$.

Nếu $D(x,y) = D(0,1) = 1$ thì

$D(x,z) + D(z,y)$

$$= \begin{cases} D\Big(0, \frac{1}{2n}\Big) + D\Big(\frac{1}{2n}, 1\Big) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4} & \text{nếu } z = \frac{1}{2n} \\ D\Big(0, \frac{1}{2n+1}\Big) + D\Big(\frac{1}{2n+1}, 1\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \text{nếu } z = \frac{1}{2n+1}. \end{cases}$$

Nếu $D(x,y) = D\Big(0, \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n}$ thì

$D(x,z) + D(z,y)$

$$= \begin{cases} D\Big(0, \frac{1}{2m}\Big) + D\Big(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2m} + |\frac{1}{2m} - \frac{1}{2n}| & \text{nếu } z = \frac{1}{2m} \\ D\Big(0, \frac{1}{2m+1}\Big) + D\Big(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \text{nếu } z = \frac{1}{2m+1} \neq 1 \\ D(0,1) + D\Big(1, \frac{1}{2n}\Big) = 1 + \frac{1}{4} & \text{nếu } z = 1. \end{cases}$$

Nếu $D(x,y) = D\Big(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2n}\Big) = |\frac{1}{2k} - \frac{1}{2n}|$ thì

$D(x,z) + D(z,y)$

$$= \begin{cases} D\Big(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2m}\Big) + D\Big(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}\Big) = |\frac{1}{2k} - \frac{1}{2m}| + |\frac{1}{2m} - \frac{1}{2n}| & \text{nếu } z = \frac{1}{2m} \\ D\Big(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2m+1}\Big) + D\Big(\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \text{nếu } z = \frac{1}{2m+1} \\ D\Big(\frac{1}{2k}, 0\Big) + D\Big(0, \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n} & \text{nếu } z = 0. \end{cases}$$

Nếu $D(x,y)=D\Big(\frac{1}{2k},\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{4}$ với $\frac{1}{2n+1}\neq 1$ thì

$D(x,z)+D(z,y)$

$$=\begin{cases} D\Big(\frac{1}{2k},0\Big)+D\Big(0,\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=0\\ D\Big(\frac{1}{2k},\frac{1}{2m}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n+1}\Big)=|\frac{1}{2k}-\frac{1}{2m}|+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m}\\ D\Big(\frac{1}{2k},\frac{1}{2m+1}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m+1},\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m+1}. \end{cases}$$

Nếu $D(x,y)=D\Big(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{4}$ với $\frac{1}{2k+1}\neq 1$ và $\frac{1}{2n+1}\neq 1$ thì

$D(x,z)+D(z,y)$

$$=\begin{cases} D\Big(\frac{1}{2k+1},0\Big)+D\Big(0,\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=0\\ D\Big(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2m}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m}\\ D\Big(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2m+1}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m+1},\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m+1}. \end{cases}$$

Nếu $D(x,y)=D\Big(\frac{1}{2k},1\Big)=\frac{1}{4}$ thì

$D(x,z)+D(z,y)$

$$=\begin{cases} D\Big(\frac{1}{2k},0\Big)+D(0,1)=\frac{1}{2k}+1 & \text{nếu } \ z=0\\ D\Big(\frac{1}{2k},\frac{1}{2m}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m},1\Big)=|\frac{1}{2k}-\frac{1}{2m}|+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m}\\ D\Big(\frac{1}{2k},\frac{1}{2m+1}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m+1},1\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m+1}\neq 1. \end{cases}$$

Nếu $D(x,y)=D\Big(\frac{1}{2k+1},1\Big)=\frac{1}{4}$ thì

$D(x,z)+D(z,y)$

$$=\begin{cases} D\Big(\frac{1}{2k+1},0\Big)+D(0,1)=\frac{1}{4}+1 & \text{nếu } \ z=0\\ D\Big(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2m}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m},1\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m}\\ D\Big(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2m+1}\Big)+D\Big(\frac{1}{2m+1},1\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \text{nếu } \ z=\frac{1}{2m+1}\neq 1. \end{cases}$$

Nếu $D(x,y)=D\Big(\frac{1}{2k+1},0\Big)=\frac{1}{4}$ thì

$D(x,z) + D(z,y)$

$$= \begin{cases} D\Big(\dfrac{1}{2k+1}, 1\Big) + D(1,0) = \dfrac{1}{4} + 1 & \text{nếu } \ z = 1 \\ D\Big(\dfrac{1}{2k+1}, \dfrac{1}{2m}\Big) + D\Big(\dfrac{1}{2m}, 0\Big) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2m} & \text{nếu } \ z = \dfrac{1}{2m} \\ D\Big(\dfrac{1}{2k+1}, \dfrac{1}{2m+1}\Big) + D\Big(\dfrac{1}{2m+1}, 0\Big) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} & \text{nếu } \ z = \dfrac{1}{2m+1} \neq 1. \end{cases}$$

Do đó, ta có $D(x,y) \leq 4.[D(x,z) + D(z,y)]$ với mọi $x, y, z \in X$. Vậy D là kiểu-mêtric trên X với $K = 4$. □

1.2 Sự hội tụ trong không gian kiểu-mêtric

Mục này trình bày lại những khái niệm dãy hội tụ, dãy Cauchy, tính đầy đủ của không gian kiểu-mêtric.

1.2.1 Định nghĩa ([15], Definition 7)**.** Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ hoặc $\{x_n\} \to x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó, x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X, D, K) là một dãy hội tụ.

1.2.2 Nhận xét. Trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K), tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, kiểu-mêtric $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ liên tục tại (x, y) nếu và chỉ nếu

$\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$ với mọi dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ trong X mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

1.2.3 Mệnh đề. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Khi đó*

(1) $D_1((x, y), (u, v)) = D(x, u) + D(y, v)$ là một kiểu-mêtric trên X^2.

(2) Dãy $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ trong (X^2, D_1, K) khi và chỉ khi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ hội tụ trong (X, D, K).

(3) Dãy $\{(x_n, y_n)\}$ là dãy Cauchy trong (X^2, D_1, K) khi và chỉ khi dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là dãy Cauchy trong (X, D, K).

(4) Không gian (X^2, D_1, K) đầy đủ khi và chỉ khi không gian (X, D, K) đầy đủ.

Chứng minh. (1). Kiểm tra trực tiếp các điều kiện của một kiểu-mêtric.

(2). Suy ra từ đẳng thức $D_1((x_n, y_n), (x, y)) = D(x_n, x) + D(y_n, y)$.

(3). Suy ra từ đẳng thức $D_1((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = D(x_n, x_m) + D(y_n, y_m)$.

(4). Suy ra từ (2) và (3). $\square$

Ví dụ sau chứng tỏ rằng kiểu-mêtric là ánh xạ không liên tục.

1.2.4 Ví dụ. Xét kiểu-mêtric D như trong Ví dụ 1.1.5. Khi đó, D là ánh xạ không liên tục.

Chứng minh. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} D\Big(\dfrac{1}{2n}, 0\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ trong (X, D, K). Mặt khác, $\lim\limits_{n\to\infty} D(\dfrac{1}{2n}, 1) = \dfrac{1}{4} \neq 1 = D(0, 1)$. Điều này chứng tỏ D là ánh xạ không liên tục. $\square$

1.2.5 Mệnh đề ([12]). *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì điểm giới hạn của nó duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x, y \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Ta có

$$D(x,y) \leq K[D(x,x_n) + D(x_n,y)].$$

Suy ra $D(x,y) = 0$ hay $x = y$. Vậy $\{x_n\}$ hội tụ tới một phần tử duy nhất.

$\square$

1.2.6 Bổ đề ([12], Lemma 3.1)**.** *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và dãy $\{x_n\}$ trong X thỏa mãn*

$$D(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \lambda D(x_n, x_{n+1}) \text{ với } \lambda \in (0, \frac{1}{K}).$$

Khi đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X.

Chứng minh. Ta có $D(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda D(x_n, x_{n-1})$.

Lặp lại quá trình này ta được

$$D(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda D(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq \lambda^n D(x_1, x_0). \tag{1.1}$$

Khi đó với $m, n \in \mathbb{N}$ mà $n > m$ ta có

$$D(x_m, x_n) \leq KD(x_m, x_{m+1}) + K^2 D(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + K^n D(x_{n-1}, x_n). \tag{1.2}$$

Từ (1.2), sử dụng (1.1) và do $\lambda \in (0, \frac{1}{K})$ nên

$$\begin{aligned} D(x_m, x_n) &\leq \left(K\lambda^m + K^2\lambda^{m+1} + ... + K^n\lambda^{n-1}\right) D(x_1, x_0) \\ &= K\lambda^m \frac{1 - (\lambda K)^{n-m}}{1 - \lambda K} D(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{K}{1 - \lambda K} \lambda^m D(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cho $m, n \to \infty$ trong (1.3) ta được $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(x_m, x_n) = 0$. Do đó $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X. $\square$

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO LỚP ÁNH XẠ SUZUKI SUY RỘNG TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC VÀ ÁP DỤNG

2.1 Định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric

Trong mục này, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, chúng tôi suy ra một số hệ quả từ định lí này. Các kết quả này là sự mở rộng của các kết quả chính trong bài báo [16] sang không gian kiểu-mêtric. Hơn nữa, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi trình bày định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric như sau.

2.1.1 Định lí. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ, trong đó D là ánh xạ liên tục và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0, 1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$\frac{1}{2K} D(x, Tx) < D(x, y) \Rightarrow D(Tx, Ty) \leq \frac{r}{K} M(x, y) \tag{2.1}$$

trong đó,

$$M(x,y) = \max\Big\{D(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{D(x,Ty)+D(Tx,y)}{2K}, \\ D(T^2x,Tx), D(T^2x,y), D(T^2x,Ty)\Big\}.$$

Khi đó, T có duy nhất điểm bất động.

Chứng minh. Lấy $x_0 \in X$. Nếu $x_0 = Tx_0$ thì x_0 là điểm bất động của T.

Nếu $x_0 \neq Tx_0$ thì $D(x_0, Tx_0) > 0$. Khi đó, từ (2.1) ta có

$$\frac{1}{2K}D(x_0,Tx_0) < D(x_0,Tx_0) \Rightarrow D(Tx_0,T^2x_0) \leq \frac{r}{K}M(x_0,Tx_0)$$

Đặt $x_n = Tx_{n-1}$. Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $Tx_n = x_n$ thì x_n là điểm bất động của T. Giả sử ngược lại, $Tx_n \neq x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, bởi (2.1) ta có

$$\frac{1}{2K}D(x_n,Tx_n) < D(x_n,Tx_n) \Rightarrow D(Tx_n,T(Tx_n)) \leq \frac{r}{K}M(x_n,Tx_n).$$

Suy ra

$$D(x_{n+1},x_{n+2})) \leq \frac{r}{K}M(x_n,x_{n+1}) \tag{2.2}$$

trong đó,

$$\begin{aligned} M(x_n,x_{n+1}) &= \max\Big\{D(x_n,x_{n+1}), D(x_n,Tx_n), D(x_{n+1},Tx_{n+1}), \\ &\qquad \frac{D(x_n,Tx_{n+1})+D(x_{n+1},Tx_n)}{2K}, D(T^2x_n,Tx_n), \\ &\qquad D(T^2x_n,x_{n+1}), D(T^2x_n,Tx_{n+1})\Big\} \\ &= \max\Big\{D(x_n,x_{n+1}), D(x_{n+1},x_{n+2})\Big\}. \end{aligned}$$

Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $M(x_n,x_{n+1}) = D(x_{n+1},x_{n+2})$. Kết hợp với (2.2) suy ra $D(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \frac{r}{K}D(x_{n+1},x_{n+2})$. Điều này là vô lý vì $r \in (0,1)$ và $K \geq 1$. Do đó, $M(x_n,x_{n+1}) = D(x_n,x_{n+1})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Kết hợp với (2.2) suy ra

$$D(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \frac{r}{K}D(x_n,x_{n+1})$$

Từ đây, đặt $\lambda = \dfrac{r}{K}$ ta được

$$D(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \lambda D(x_n, x_{n+1}) \tag{2.3}$$

Từ (2.3) và sử dụng Bổ đề 1.2.6 suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do X đầy đủ nên $\{x_n\}$ hội tụ, tức là tồn tại p sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = p.$$

Bây giờ, ta chứng minh p là điểm bất động của T. Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{1}{2K}D(x_n, Tx_n) \geq D(x_n, p) \text{ và } \frac{1}{2K}D(Tx_n, T^2x_n) \geq D(Tx_n, p).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} D(x_n, Tx_n) &\leq K[D(x_n, p) + D(p, Tx_n)] \\ &\leq K[\frac{1}{2K}D(x_n, Tx_n) + \frac{1}{2K}D(Tx_n, T^2x_n) \\ &= \frac{1}{2}D(x_n, Tx_n) + \frac{1}{2}D(Tx_n, T^2x_n). \end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$D(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}D(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2}D(x_{n+1}, x_{n+2}). \tag{2.4}$$

Từ (2.3) và (2.4) suy ra

$$\begin{aligned} D(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{1}{2}D(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2}\lambda D(x_n, x_{n+1}) \\ &< \frac{1}{2}D(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2}D(x_n, x_{n+1}) \\ &= D(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2K}D(x_n, Tx_n) < D(x_n, p) \tag{2.5}$$

hoặc

$$\frac{1}{2K}D(Tx_n, T^2x_n) < D(Tx_n, p) \tag{2.6}$$

Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Giả sử (2.5) thỏa mãn với hữu hạn các giá trị $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, (2.6) thỏa mãn với vô hạn các giá trị $n \in \mathbb{N}$. Do đó, tồn tại dãy $\{n_k\}$ sao cho $\frac{1}{2K}D(Tx_{n_k}, T^2x_{n_k}) < D(Tx_{n_k}, p)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Kết hợp với (2.1) suy ra

$$\begin{aligned} D(T^2x_{n_k}, Tp) &\leq \frac{r}{K}M(Tx_{n_k}, p) \\ &= \frac{r}{K}\max\Big\{D(Tx_{n_k}, p), D(Tx_{n_k}, T^2x_{n_k}), D(p, Tp), \\ &\qquad \frac{D(Tx_{n_k}, Tp) + D(p, T^2x_{n_k})}{2K}, D(T^3x_{n_k}, Tx_{n_k}), \\ &\qquad D(T^3x_{n_k}, p), D(T^3x_{n_k}, Tp)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.7) ta được

$$D(p, Tp) \leq \frac{r}{K}D(p, Tp).$$

Suy ra $D(p, Tp) = 0$ hay $Tp = p$.

Trường hợp 2. Giả sử (2.6) thỏa mãn với hữu hạn các giá trị $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, (2.5) thỏa mãn với vô hạn các giá trị $n \in \mathbb{N}$. Do đó, tồn tại dãy $\{n_k\}$ sao cho $\frac{1}{2K}D(x_{n_k}, Tx_{n_k}) < D(x_{n_k}, p)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Kết hợp với (2.1) suy ra

$$\begin{aligned} D(Tx_{n_k}, Tp) &\leq \frac{r}{K}M(x_{n_k}, p) \\ &= \frac{r}{K}\max\{D(x_{n_k}, p), D(x_{n_k}, Tx_{n_k}), D(p, Tp), \\ &\qquad \frac{D(x_{n_k}, Tp) + D(Tx_{n_k}, p)}{2K}, D(T^2x_{n_k}, Tx_{n_k}), \\ &\qquad D(T^2x_{n_k}, p), D(T^2x_{n_k}, Tp)\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.8) ta được

$$D(p,Tp) \leq \frac{r}{K} D(p,Tp).$$

Suy ra $D(p,Tp) = 0$ hay $Tp = p$.

Trong cả hai trường hợp ta đều chứng minh được T có điểm bất động.

Bây giờ, ta chứng minh điểm bất động của T là duy nhất. Giả sử ngược lại, tồn tại $q \neq p$ sao cho $Tq = q$ và $Tp = p$.

Ta có $0 = \dfrac{1}{2K} D(p,Tp) < D(p,q)$. Do đó, bởi (2.1) suy ra

$$\begin{aligned} D(p,q) &= D(Tp,Tq) \\ &\leq \frac{r}{K} M(p,q) \\ &= \frac{r}{K} \max\Big\{ D(p,q), D(p,Tp), D(q,Tq), \frac{D(p,Tq)+D(q,Tp)}{2K}, \\ &\qquad\qquad D(T^2p,Tp), D(T^2p,q), D(T^2p,Tq) \Big\} \\ &= \frac{r}{K} D(p,q) \\ &< D(p,q). \end{aligned}$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó, T có duy nhất điểm bất động. □

Từ Định lí 2.1.1, bằng cách chọn $M(x,y) = D(x,y)$, chúng tôi nhận được hệ quả sau. Hệ quả này là sự mở rộng của [16, Theorem 3.1] trên không gian kiểu-mêtric.

2.1.2 Hệ quả. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ, trong đó D là ánh xạ liên tục và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0,1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$\frac{1}{2K} D(x,Tx) < D(x,y) \Rightarrow D(Tx,Ty) \leq \frac{r}{K} D(x,y). \tag{2.9}$$

Khi đó, T có duy nhất điểm bất động.

Vì mỗi không gian mêtric là không gian kiểu-mêtric với $K = 1$ nên từ Định lí 2.1.1 và Hệ quả 2.1.2 ta lần lượt nhận được Hệ quả 2.1.3 và Hệ quả 2.1.4.

2.1.3 Hệ quả. *Cho (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0, 1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rM(x, y), \tag{2.10}$$

trong đó,

$$M(x, y) = \max\Big\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2}, \\ d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty)\Big\}.$$

Khi đó, T có duy nhất điểm bất động.

2.1.4 Hệ quả ([16], Theorem 3.1)**.** *Cho (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0, 1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rd(x, y). \tag{2.11}$$

Khi đó, T có duy nhất điểm bất động.

Cuối cùng của mục này, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Trong đó, Ví dụ 2.1.5 chứng tỏ Định lí 2.1.1 mạnh hơn Hệ quả 2.1.2 và Ví dụ 2.1.6 chứng tỏ Hệ quả 2.1.3 mạnh hơn [16, Theorem 3.1] trên cùng một không gian.

2.1.5 Ví dụ. Xét $X = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ và ánh xạ $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ xác định bởi $D(x, y) = (x - y)^2$.

Khi đó, (X, D) là không gian kiểu-mêtric đầy đủ với $K = 2$ và D là ánh xạ liên tục.

Xét ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ xác định bởi

$$Tx = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{nếu } \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ 0 & \text{nếu } \ x \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 2]. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x, y \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$$D(Tx, Ty) = \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{1}{4}D(x,y) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}M(x,y).$$

Trường hợp 2. $x, y \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 2]$.

$$D(Tx, Ty) = 0 \leq \frac{r}{K}M(x,y) \text{ với mọi } r \in (0,1).$$

Trường hợp 3. $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ và $y \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 2]$

Do $\frac{1}{2K}D(x, Tx) < D(x,y)$ nên $\frac{1}{4}\big(x + \frac{x}{2}\big)^2 < (x-y)^2$.
Suy ra $\frac{x^2}{4} < \frac{4}{9}(x-y)^2$.

Điều này chứng tỏ $D(Tx, Ty) < \frac{1}{2}\frac{8}{9}D(x,y) \leq \frac{1}{2}\frac{8}{9}M(x,y)$.

Trường hợp 4. $x \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 2]$ và $y \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$$D(Tx, Ty) = \frac{y^2}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}D(T^2x, y) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}M(x,y).$$

Khi đó, với $r = \frac{8}{9} = \max\{\frac{1}{2}, \frac{8}{9}\}$ thì ánh xạ T thỏa điều kiện (2.1) của Định lí 2.1.1. Do đó, T có duy nhất điểm bất động.

Tuy nhiên, với $x = 2, y = 4$ ta có $\frac{1}{4}D(2, T2) = 1 < 4 = D(2,4)$. Mà $D(T2, T4) = 4 > \frac{r}{2}.4 = \frac{r}{2}D(2,4)$ với mọi $r \in (0,1)$. Do đó, điều kiện (2.9) trong Hệ quả 2.1.2 không được thỏa mãn. Vì vậy Hệ quả 2.1.2 không thể áp dụng cho ánh xạ T.

2.1.6 Ví dụ. Xét $X = \{1,2,3,4,5\}$ và ánh xạ $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ xác định bởi

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x = y \\ 2 \text{ nếu } (x,y) \in \{(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3)\} \\ 1 \text{ trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó, (X, d) là không gian mêtric đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ xác định bởi

$$T1 = T2 = T3 = 1, T4 = 2, T5 = 3.$$

Do $\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y)$ nên $x \neq y$. Do đó, ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x, y \in \{1, 2, 3\}$ và $x \neq y$.

$$d(Tx, Ty) = d(1, 2) = 0 \leq rM(x, y) \text{ với mọi } r \in (0, 1).$$

Trường hợp 2. $x \in \{1, 2, 3\}$ và $y = 4$.

$$d(Tx, Ty) = d(1, 2) = 1 = \frac{1}{2}d(1, 4) = \frac{1}{2}d(T^2x, y) \leq \frac{1}{2}M(x, y).$$

Trường hợp 3. $x = 4$ và $y \in \{1, 2, 3\}$.

$$d(Tx, Ty) = d(2, 1) = 1.$$

Nếu $x = 4$ và $y = 2$ thì $d(x, y) = d(4, 2) = 2$. Suy ra

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{2}d(x, y) \leq \frac{1}{2}M(x, y).$$

Nếu $x = 4$ và $y \in \{1, 3\}$ thì $\dfrac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2} = \dfrac{3}{2}$. Suy ra

$$d(Tx, Ty) = \frac{2}{3}.\frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2} \leq \frac{2}{3}M(x, y).$$

Trường hợp 4. $x \in \{1, 2, 3\}$ và $y = 5$.

$$d(Tx, Ty) = d(1, 3) = 1 = \frac{1}{2}d(1, 5) = \frac{1}{2}d(T^2x, y) \leq \frac{1}{2}M(x, y).$$

Trường hợp 5. $x = 5$ và $y \in \{1, 2, 3\}$.

$$d(Tx, Ty) = d(3, 1) = 1.$$

Nếu $x = 5$ và $y = 3$ thì $d(x, y) = d(5, 3) = 2$. Suy ra

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{2}d(x, y) \leq \frac{1}{2}M(x, y).$$

Nếu $x = 5$ và $y \in \{1, 2\}$ thì $\dfrac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2} = \dfrac{3}{2}$. Suy ra

$$d(Tx, Ty) = \frac{2}{3}.\frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2} \le \frac{2}{3}M(x, y).$$

Khi đó, với $r = \dfrac{2}{3} = \max\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\}$ thì ánh xạ T thỏa mãn điều kiện (2.10) của Hệ quả 2.1.3. Do đó, T có duy nhất điểm bất động.

Bây giờ, với $x = 3, y = 4$ ta thấy $\dfrac{1}{2}d(3, T3) = \dfrac{1}{2}d(3, 1) = \dfrac{1}{2} < 1 = d(3, 4)$. Tuy nhiên, $d(T3, T4) = d(1, 2) = 1 > r = rd(3, 4)$. Do đó, điều kiện (2.11) trong Hệ quả 2.1.4 không được thỏa mãn với $x = 3, y = 4$. Vì vậy, không thể áp dụng Hệ quả 2.1.4 cho ánh xạ T.

2.2 Áp dụng

Trong mục này, chúng tôi áp dụng Định lí 2.1.1 để thiết lập một số kết quả điểm bất động kép. Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm điểm bất động kép.

2.2.1 Định nghĩa ([2], Definition 1.2)**.** Cho ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$. Khi đó, $(x, y) \in X \times X$ được gọi là *điểm bất động kép* của F nếu $F(x, y) = x$ và $F(y, x) = y$.

2.2.2 Bổ đề ([23], Lemma 2.2)**.** *Cho ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$ và ánh xạ $T_F : X \times X \longrightarrow X \times X$ được định nghĩa bởi*

$$T_F(x, y) = (F(x, y), F(y, x)) \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Khi đó, (x, y) là điểm bất động kép của F khi và chỉ khi (x, y) là điểm bất động của T_F.

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập định lí điểm bất động kép của ánh xạ.

2.2.3 Định lí. *Cho* (X, D, K) *là không gian kiểu-mêtric đầy đủ, trong đó* D *là ánh xạ liên tục và ánh xạ* $F : X \times X \longrightarrow X$. *Giả sử tồn tại* $r \in (0, 1)$ *sao cho với mọi* $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2K}\big(D(x, F(x, y)) + D(y, F(y, x))\big) < D(x, u) + D(y, v)\\&\Rightarrow D(F(x, y), F(u, v)) + D(F(y, x), F(v, u)) \le \frac{r}{K} M((x, y), (u, v))\end{aligned} \tag{2.12}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}M((x, y), (u, v)) = \max\Big\{&D(x, u) + D(y, v), D(x, F(x, y))\\&+D(y, F(y, x)), D(u, F(u, v)) + D(v, F(v, u)),\\&\frac{1}{2K}\big(D(x, F(u, v)) + D(y, F(v, u)) + D(F(x, y), u) + D(F(y, x), v)\big),\\&D(F(F(x, y), F(y, x)), F(x, y)) + D(F(F(y, x), F(x, y)), F(y, x)),\\&D(F(F(x, y), F(y, x)), u) + D(F(F(y, x), F(x, y)), v),\\&D(F(F(x, y), F(y, x)), F(u, v)) + D(F(F(y, x), F(x, y)), F(v, u))\Big\}.\end{aligned}$$

Khi đó, F *có duy nhất điểm bất động kép.*

Chứng minh. Đặt

$$D_1((x, y), (u, v)) = D(x, u) + D(y, v)$$

với mọi $(x, y), (u, v) \in X \times X$ và ánh xạ $T_F : X \times X \to X \times X$ xác định bởi

$$T_F(x, y) = (F(x, y), F(y, x))$$

với $x, y \in X$.

Theo Mệnh đề 1.2.3, (X^2, D_1, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ.

Từ điều kiện (2.12) ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2K} D_1((x, y), T_F(x, y)) < D_1((x, y), (u, v))\\&\Rightarrow D_1(T_F(x, y), T_F(u, v)) \le \frac{r}{K} M((x, y), (u, v)), r \in (0, 1)\end{aligned}$$

trong đó,

$$
\begin{aligned}
&M((x,y),(u,v))\\
&= \max\Big\{D_1((x,y),(u,v)), D_1((x,y),T_F(x,y)),\\
&\qquad D_1((u,v),T_F(u,v)), \frac{D_1((x,y),T_F(u,v)) + D_1(T_F(x,y),(u,v))}{2K},\\
&\qquad D_1(T_F^2(x,y),T_F(x,y)), D_1(T_F^2(x,y),(u,v)), D_1(T_F^2(x,y),T_F(u,v))\Big\}.
\end{aligned}
$$

Theo Định lí 2.1.1 suy ra T_F có duy nhất điểm bất động. Do đó, theo Bổ đề 2.2.2 suy ra F có duy nhất điểm bất động kép. □

Từ Định lí 2.2.3, bằng cách chọn $M((x,y),(u,v)) = D(x,u) + D(y,v)$ chúng tôi nhận được hệ quả sau.

2.2.4 Hệ quả. *Cho (X,D,K) là không gian kiểu-mêtric đầy đủ, trong đó D là ánh xạ liên tục và ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0,1)$ sao cho với mọi $x,y \in X$,*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2K}\big(D(x,F(x,y)) + D(y,F(y,x))\big) < D(x,u) + D(y,v)\\
&\Rightarrow D(F(x,y),F(u,v)) + D(F(y,x),F(v,u)) \le \frac{r}{K}\big(D(x,u) + D(y,v)\big)
\end{aligned}
$$

với $r \in (0,1)$.

Khi đó, F có duy nhất điểm bất động kép.

Vì mỗi không gian mêtric là không gian kiểu-mêtric với $K = 1$ nên từ Định lí 2.2.3 và Hệ quả 2.2.4 ta lần lượt nhận được Hệ quả 2.2.5 và Hệ quả 2.2.6.

2.2.5 Hệ quả. *Cho (X,d) là không gian mêtric đầy đủ và ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0,1)$ sao cho với mọi $x,y \in X$,*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big(d(x,F(x,y)) + d(y,F(y,x))\big) < d(x,u) + D(y,v)\\
&\Rightarrow d(F(x,y),F(u,v)) + d(F(y,x),F(v,u)) \le rM((x,y),(u,v))
\end{aligned}
$$

trong đó,

$$
\begin{aligned}
M((x,y),(u,v)) = \max\Big\{ & d(x,u)+d(y,v), d(x,F(x,y)) \\
& + d(y,F(y,x)), d(u,F(u,v)) + d(v,F(v,u)), \\
& \frac{1}{2}\big(d(x,F(u,v)) + d(y,F(v,u)) + d(F(x,y),u) + d(F(y,x),v)\big), \\
& d(F(F(x,y),F(y,x)),F(x,y)) + d(F(F(y,x),F(x,y)),F(y,x)), \\
& d(F(F(x,y),F(y,x)),u) + d(F(F(y,x),F(x,y)),v), \\
& d(F(F(x,y),F(y,x)),F(u,v)) + d(F(F(y,x),F(x,y)),F(v,u))\Big\}.
\end{aligned}
$$

Khi đó, F có duy nhất điểm bất động kép.

2.2.6 Hệ quả. *Cho (X,d) là không gian mêtric đầy đủ và ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$. Giả sử tồn tại $r \in (0,1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\big(d(x,F(x,y)) + d(y,F(y,x))\big) < d(x,u) + d(y,v) \\
& \Rightarrow d(F(x,y),F(u,v)) + d(F(y,x),F(v,u)) \le r\big(d(x,u) + d(y,v)\big).
\end{aligned}
$$

Khi đó, F có duy nhất điểm bất động kép.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1 Kết luận

Khóa luận đã đạt được những kết quả sau

- Hệ thống hóa một số khái niệm, tính chất cơ bản của không gian kiểu-mêtric.

- Chi tiết hóa một số ví dụ về không gian kiểu-mêtric như Ví dụ 1.1.3, Ví dụ 1.1.4, Ví dụ 1.1.5.

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric như Định lí 2.1.1 và một số hệ quả như Hệ quả 2.1.2, Hệ quả 2.1.3, Hệ quả 2.1.4.

- Xây dựng ví dụ minh hoạ cho Định lí 2.1.1 và Hệ quả 2.1.3 như Ví dụ 2.1.5 và Ví dụ 2.1.6.

- Xây dựng một số áp dụng của Định lí 2.1.1 trong việc thiết lập định lí điểm bất động kép như Định lí 2.2.3, Hệ quả 2.2.4, Hệ quả 2.2.5 và Hệ quả 2.2.6.

2 Kiến nghị

Khóa luận có thể phát triển theo hướng sau

- Tìm một số áp dụng khác cho định lí điểm bất động của lớp ánh xạ

Suzuki suy rộng trên không gian kiểu-mêtric.

- Nghiên cứu về điểm bất động cho lớp ánh xạ Suzuki suy rộng trên một số không gian mêtric suy rộng khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] B. Ali and M. Abbas (2013), *Suzuki type fixed point theorem for fuzzy mappings in ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2013:9**, 20 pages.

[2] T. Gnana Bhaskar and V. Lakshmikantham (2006), *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal., **65**, 1379-1393.

[3] P. Collaco and J. C. E. Silva (1997), *A complete comparison of 25 contraction conditions*, Nonlinear Anal., **30**(1), 471-476.

[4] B. C. Dhage (1992), *Generalized metric spaces mappings with fixed point*, Bull. Calcutta Math. Soc., **84**, 329-336.

[5] N. V. Dung, V. T. L. Hang and S. Sedghi (2013), *Remarks on metric-type spaces and applications*, 13 pages, preprint.

[6] D. Doríc, Z. Kadelburg and S. Radenovíc (2012), *Edelstein-Suzuki-type fixed point results in metric and abstract metric spaces*, Nonlinear Anal., **75**, 1927-1932.

[7] N. V. Dung, N. T. T. Ly, V. D. Thinh and N. T. Hieu (2013), *Suzuki-type fixed point theorems for two maps in metric-type spaces*, J. Nonlinear Anal. Optim., **4**(2), 17-29.

[8] S. Gahler (1963), *2-metricsche Raume und iher topoloische Struktur*, Math. Nachr., **26**, 115-148.

[9] N. T. Hieu and V. T. L. Hang (2013), *Coupled fixed point theorems for generalized α-ψ-contactive mappings in partially ordered metric-type spaces*, J. Nonlinear Anal. Optim., submitted.

[10] N. T. Hiếu và H. H. Hưởng (2014), *Về định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trong không gian kiểu-mêtric*, Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, (đã nhận đăng).

[11] N. Hussain, D. Djori'c, Z. Kadelburg and S. Radenovi'c (2012), *Suzuki-type fixed point results in metric type spaces*, Fixed Point Theory Appl., **126**, 14 pages.

[12] M. Jovanovic, Z. Kadelburg and S. Radenovic (2010), *Common fixed point results in metric-type spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2010**, 1-15.

[13] P. Kumam, N. V. Dung and K. Sitthithakerngkiet (2014), *A gener- alization of Ćirić fixed point theorems*, Filomat, 7 pages, to appear.

[14] M. A. Khamsi (2010), *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **2010**, 7 pages.

[15] M. A. Khamsi and N. Hussain (2010), *KKM mappings in metric type spaces*, Nonliear Anal., **73**(9), 3123-3129.

[16] S. Muralisankar and K. Jeyabal (2013), *Generalization of Suzuki type fixed point theorems*, Adv. Fixed Point Theory, **3**(3), 502-509.

[17] Z. Mustafa and B. Sims (2006), *A new approach to generalized metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **7**(2), 289-297.

[18] B. E. Rhoades (1977), *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., **226**, 257-290.

[19] T. Suzuki (2008), *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., **136**(5), 1861-1869.

[20] T. Suzuki (2009), *A new type of fixed point theorem in metric spaces*, Nonlinear Anal., **71**, 5313-5317.

[21] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche (2012), *A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces*, Mat. Vesnik, **64**(3), 258-266.

[22] N. Shobkolaei, S. Sedghi, J. R. Roshan and N. Hussain (2013), *Suzuki-type fixed point results in metric-like spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2013**, 9 pages.

[23] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro (2012), *Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings*, Nonlinear Anal., **75**, 2154-2165.